

Existencia de soluciones positivas para problemas no lineales con discontinuidades indefinidas^{**}

Marco Calahorrano
Escuela Politécnica Nacional
Departamento de Matemática

A Joaquín Bustoz,
entrañable amigo.
In memoriam.

Resumen

En este artículo presentamos algunos resultados sobre la existencia de soluciones positivas para ecuaciones diferenciales de segundo orden (1-dimensional) con término no-lineal de la forma $\lambda m(x)f(u)$, donde m es discontinua y cambia de signo.

Abstract

In this paper we present some results about the existence of positive solutions for second order differential equations (1-dimensional) with nonlinear term of the form $\lambda m(x)f(u)$, where m is discontinuous and sign changing.

*2000 Mathematics Subject Classification. 34B15, 34B18, 34B09

**Key words or phrases: indefinite discontinuous nonlinearities, positive solutions, boundary value problems.

1. Introducción

Problemas con no linealidades indefinidas han sido estudiados por S. Alama, M. del Pino, G. Tarantello [1], [2], [3], H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolcetta, L. Nirenberg [10], D. Papini, F. Zanolin [22], [23], [24], K. Chang y M. Jiang [18]. El caso de valores propios para pesos indefinidos fue estudiado por Anane, Chakrone y Moussa [8], M. Cuesta [19]. Cuando las no linealidades son indefinidas y discontinuas han contribuido también M. C. y S. González [11]. El caso de ecuaciones semilineales elípticas con no linealidades discontinuas ha sido estudiado extensamente por A. Ambrosetti, C. Stuart, M. Badiale, M. Struwe, D. Arcoya, etc, mirar por ejemplo [4], [25], [7], [6], [9] para una bibliografía más extensa. Para los casos donde las no linealidades aparecen con peso observar [12], [20].

Ahora estudiamos la existencia de soluciones positivas para problemas con valores al borde de la forma:

$$(1.1) \quad \begin{cases} -u'' = \lambda m(x)f(u) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$, $m \in PC([0, 1])^1$, m cambia signo y f es una función no lineal con condiciones de crecimiento en cero y en el infinito.

Por facilidad vamos a suponer:

$$(1.2) \quad m : (0, 1) \mapsto \mathbf{R}$$

tal que

$$m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \alpha \\ -1 & \text{si } \alpha < x < 1 \end{cases}$$

con $\alpha \in]0, 1[$.

Consideraremos las siguientes hipótesis sobre $f \in C^2$

(A) f es tal que:

$$(1.3) \quad f''(s) > 0 \quad \text{para } s \geq 0$$

¹PC([0,1]) es el conjunto de las funciones reales continuas por tramos definidas en el intervalo [0,1].

$$(1.4) \quad f(0) = 0$$

$$(1.5) \quad f(s) - sf'(s) < 0 \quad \text{para } s > 0$$

(B) f verifica las siguientes hipótesis:

$$(1.6) \quad f(0) = 0$$

$$(1.7) \quad \text{Existe } s_0 > 0 \text{ tal que } f''(s) > 0 \text{ para } s \in [0, s_0) \text{ y}$$

$$(1.8) \quad f''(s) \geq 0 \text{ para } s \in [s_0, +\infty)$$

$$(1.9) \quad f(s) - sf'(s) > 0 \text{ para } s > 0$$

Observación 1.10 *Para la obtención de nuestros resultados hemos seguido las ideas desarrolladas por A. Castro, R. Shivaji y A. Kurepa en [13], [16], [17] y [14] donde estudian la existencia de soluciones no negativas para problemas de tipo semipositone. Es importante considerar los trabajos de D. Papini y F. Zanolin [22], [23], [24] donde ecuaciones (1-dimensional) no lineales con peso indefinido son estudiadas; ellos, sin embargo, consideran pesos al menos continuos. Tomen en cuenta [23] para un estudio histórico, problemas relacionados, bibliografía más extensa y aplicaciones a la ecuación de Hill.*

2. El resultado principal

Antes de enunciar el teorema fundamental del trabajo introduzcamos una definición de solución para (1.1).

Definición 2.1 *Diremos que $u \in C([0, 1])$ es una solución de (1.1) si $u \in C^2([0, \alpha] \cup [\alpha, 1])$ y verifica (1.1) salvo el punto de discontinuidad.*

Observación 2.2 *En general, las soluciones definidas como en (2.1) pueden ser llamadas soluciones del problema a “ k más dos puntos” si k son los puntos de discontinuidad de m , en el caso particular que nos ocupa podríamos llamarla solución del problema de “tres puntos”, $u(0) = u(1) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \alpha^-} u(t) = \lim_{t \rightarrow \alpha^+} u(t)$.*

Teorema 2.3 Sea $f'(s) > 0$ para $s \geq 0$,

(a) Si las hipótesis **[A]** se verifican y $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = +\infty$ entonces existe $\lambda^* > 0$ tal que (1.1), tiene al menos una solución positiva para $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

(b) Si las hipótesis **[B]** se verifican y $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = C$, (C una constante) y $4f'(0) > C$, entonces existen constantes $0 < \underline{\lambda} < \bar{\lambda}$ tales que (1.1) tiene al menos una solución positiva para $\lambda \in (\underline{\lambda}, \bar{\lambda}) = \Lambda$.

Observación 2.4 Las soluciones obtenidas en el teorema anterior, generalmente, no son soluciones en el sentido de las distribuciones aunque lo son en el sentido casi todo punto.

3. Demostración del Teorema

Para la demostración del teorema (3.34) nosotros transformamos el problema (1.1) en:

$$(3.1) \quad \begin{cases} -u'' = \lambda f(u) & 0 < x < \alpha \\ u(0) = 0, u(\alpha) = \rho \end{cases}$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} u'' = \lambda f(u) & \alpha < x < 1 \\ u(\alpha) = \rho, u(1) = 0 \end{cases}$$

con $\rho > 0$.

Observación 3.3 Si permitimos que $\rho \geq 0$, entonces las soluciones serán no-negativas y si ρ es simplemente un real la solución podrá cambiar signo.

Lema 3.4 Si las ecuaciones con condiciones al borde (3.1) y (3.2) tienen solución entonces (1.1) también lo tendrá (en el sentido de la definición 2.1).

Estudiaremos ahora las soluciones de los problemas (3.1) y (3.2), para lo cual primero analizaremos la ecuación de (3.1).

Si multiplicamos por u' y luego integramos la ecuación de (3.1) obtendremos:

$$(3.5) \quad -\frac{u'^2}{2} = \lambda F(u) + k,$$

donde

$$(3.6) \quad F(u) = \int_0^u f(s)ds$$

Como $f(s) > 0$ para $s > 0$, u es cóncava y por lo tanto buscaré soluciones positivas de (3.1) tal que $u(\alpha) = \rho$ y $u'(\alpha^-) = 0$.

Proposición 3.7 *Si las hipótesis de la parte a) del teorema se verifican entonces existe $\lambda^* > 0$ tal que (3.1) tiene al menos una solución positiva, u , para todo $\lambda \in]0, \lambda^*[$. Además la solución u cumple: $u(0) = 0$, $u(\alpha) = \rho$ ($\rho = \sup_{x \in (0, \alpha)} u(x)$) y $u'(\alpha^-) = 0$*

Demostración: De (3.5) y $u'(\alpha^-) = 0$

$$(3.8) \quad u'^2 = 2\lambda[F(\rho) - F(u)].$$

De la positividad y concavidad de u en $]0, \alpha[$ tenemos que:

$$(3.9) \quad u'(x) = \sqrt{2\lambda[F(\rho) - F(u)]},$$

$$(3.10) \quad \frac{du}{\sqrt{F(\rho) - F(u)}} = \sqrt{2\lambda}dx,$$

que integrando nos produce:

$$(3.11) \quad \sqrt{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \int_0^\rho \frac{du}{\sqrt{F(\rho) - F(u)}}.$$

Definamos la función G como sigue:

$$(3.12) \quad G(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \int_0^\rho \frac{du}{\sqrt{F(\rho) - F(u)}}.$$

Si en la fórmula anterior se hace el cambio de variables $u = \rho v$ la función G viene transformada en:

$$(3.13) \quad G(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{2}\alpha} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{F(\rho) - F(\rho v)}}.$$

De la hipótesis (1.5), $f(s) - sf'(s) < 0$, se puede probar fácilmente que: $\frac{dG}{d\rho} < 0$ para $\rho > 0$.

Por otro lado podemos demostrar que:

$$(3.14) \quad G(\rho) \leq \frac{\rho}{\alpha\sqrt{2F(\rho)}} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v}},$$

y por lo tanto

$$(3.15) \quad G(\rho) \leq \frac{\rho\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{F(\rho)}},$$

Y como hemos supuesto $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} = +\infty$ de la fórmula (3.15) nosotros obtendremos que:

$$(3.16) \quad G(\rho) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \rho \rightarrow +\infty.$$

De esto es claro que la proposición (3.7) viene inmediatamente. \square

Observación 3.17 *La fórmula definida en (3.12) está relacionada con una dada por los autores Manásevich y Zanolin denominada Time-mapping, mirar [21].*

Proposición 3.18 *Bajo las hipótesis de la parte a) del teorema, es decir las mismas de la proposición (3.7), el problema (3.2) tiene al menos una solución positiva para todo $\lambda \in]0, \lambda^*[$.*

Antes de demostrar la proposición notemos lo siguiente:

Observación 3.19 *Buscamos soluciones del problema (1.1) al menos continuas en $[0, 1]$; por tanto $\rho = \sup_{x \in]\alpha, 1[} u(x)$ y entonces la solución de (1.1) no es diferenciable en α pues debe verificar la ecuación de (3.2). Del razonamiento anterior deducimos que cualquier solución de (1.1) en el sentido de la definición 2.1 debe verificar (3.2) con $u'(\alpha^+) < 0$*

Demostración: Demostremos la proposición (3.18).

Si tomamos en cuenta la observación (3.19) nosotros debemos suponer que existe al menos un $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}^-$ tal que:

$$(3.20) \quad u(\alpha^+) = \hat{\alpha}\rho$$

De la ecuación (3.2) y siguiendo el procedimiento de la demostración de la proposición (3.7) se tiene que:

$$(3.21) \quad \int_0^\rho \frac{du}{\sqrt{(\hat{\alpha}\rho)^2 - 2\lambda(F(\rho) - F(u))}} = 1 - \alpha$$

Para que la proposición (3.18) quede demostrada nos basta probar que efectivamente existe un tal $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}^-$ tal que para todo $\lambda \in]0, \lambda^*[$ la integral de la fórmula (3.21) alcance el valor $1 - \alpha$, con $\alpha \in]0, 1[$. Definamos la función $\hat{G}_\lambda(\rho)$ de la forma siguiente:

$$(3.22) \quad \hat{G}_\lambda(\rho) = \int_0^\rho \frac{du}{\sqrt{(\hat{\alpha}\rho)^2 - 2\lambda(F(\rho) - F(u))}}$$

que con el cambio de variables $u = \rho v$ se transforma en:

$$(3.23) \quad \hat{G}_\lambda(\rho) = \rho \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(\hat{\alpha}\rho)^2 - 2\lambda(F(\rho) - F(\rho v))}}$$

De la prueba de la proposición (3.7) se puede deducir que:

$$(3.24) \quad \sqrt{\lambda} \leq \frac{\rho\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{F(\rho)}}.$$

En efecto, mirar la desigualdad (3.15) para una prueba.

Tomando en cuenta (3.24) y luego de algunos cálculos podemos llegar a:

$$(3.25) \quad \frac{1}{|\hat{\alpha}|} \leq \hat{G}_\lambda(\rho) \leq \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}^2 - \frac{4}{\alpha^2}}}$$

Por lo tanto para que se verifique la proposición (3.18) se debe cumplir:

$$(3.26) \quad \frac{1}{|\hat{\alpha}|} \leq 1 - \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}^2 - \frac{4}{\alpha^2}}}$$

para $\alpha \in]0, 1[$.

Y así $\widehat{\alpha}$ debería cumplir con las desigualdades:

$$(3.27) \quad |\widehat{\alpha}| \leq \sqrt{\frac{1}{(1-\alpha)^2} + \frac{4}{\alpha^2}},$$

$$(3.28) \quad |\widehat{\alpha}| \geq \frac{1}{(1-\alpha)},$$

y

$$(3.29) \quad |\widehat{\alpha}| > \frac{2}{\alpha},$$

que se verifican fácilmente. \square

Proposición 3.30 *Supuestas las hipótesis de la parte b) del teorema (3.34), entonces existen constantes $0 < \underline{\lambda} < \bar{\lambda}$ tales que (3.1) tiene al menos una solución positiva para $\lambda \in (\underline{\lambda}, \bar{\lambda}) = \Lambda$.*

Demostración:

Se sigue el razonamiento de la demostración de la proposición (3.7) hasta llegar a:

$$(3.31) \quad G(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{2}\alpha} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{F(\rho) - F(\rho v)}}.$$

De la hipótesis $f(s) - sf'(s) > 0$ (1.9) se tiene que $\frac{dG}{d\rho} > 0$, es decir, G es creciente y por tanto:

$$(3.32) \quad \frac{1}{\alpha^2 f'(0)} \leq \lambda \leq \frac{4}{\alpha^2 C}.$$

Y puesto que $4f'(0) > C$ entonces existen constantes $0 < \underline{\lambda} < \bar{\lambda}$ tales que para todo $\lambda \in (\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$ el problema (3.1) tiene al menos una solución positiva.

\square

Proposición 3.33 *Bajo las hipótesis de la proposición (3.30) el problema (3.2) tiene al menos una solución positiva para $\lambda \in (\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$.*

Demostración: Se aplica el razonamiento de la demostración de la proposición (3.18). \square

Ahora estamos en capacidad de probar el teorema ya enunciado:

Teorema 3.34 *Sea $f'(s) > 0$ para $s \geq 0$,*

(a) *Si las hipótesis [A] se verifican y $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = +\infty$ entonces existe $\lambda^* > 0$ tal que (1.1), tiene al menos una solución positiva para $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*

(b) *Si las hipótesis [B] se verifican y $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = C$, (C una constante) y $4f'(0) > C$, entonces existen constantes $0 < \underline{\lambda} < \bar{\lambda}$ tales que (1.1) tiene al menos una solución positiva para $\lambda \in (\underline{\lambda}, \bar{\lambda}) = \Lambda$.*

Demostración:

La parte a) sigue de las proposiciones (3.7) y (3.18), y la b) viene de las proposiciones (3.30) y (3.33).

\square

Observación 3.35 *Extensiones del problema al caso del operador p -Laplaciano en una dimensión podrán ser hechos y seguramente resultados similares serán obtenidos.*

Reconocimientos

Este artículo está basado en la conferencia presentada por el autor en la 3er Alfa Meeting, Partial Differential Equations in Industry and Engineering, Viena, junio 2005.

Agradezco la hospitalidad del Departamento de Matemática de la Universidad de Viena y del Instituto Pauli de la Universidad de Viena.

Financiado parcialmente por Alfa Project Partial Differential Equations in Industry and Engineering y Escuela Politécnica Nacional.

Marco Calahorrano Recalde
Departamento de Matemática
Escuela Politécnica Nacional
Ladrón de Guevara E11-253
Apartado 17-01-2759
Quito-Ecuador
calahor@math.epn.edu.ec

Referencias

- [1] S. Alama, M. Del Pino, *Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via Morse theory and linking*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **13**, (1996), 95–115.
- [2] S. Alama, G. Tarantello, *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities*, Cal. Var., **1**, (1993), 439–475.
- [3] S. Alama, G. Tarantello, *Elliptic Problems with Nonlinearities Indefinite in Sign*, Journal of Functional Analysis, **141**, (1996), 159–215.
- [4] A. Ambrosetti, *Critical Points and Nonlinear Variational Problems*, Cours de la Chaire Lagrange, Mémoire (nouvelle série) N° 49, Supplément au Bulletin de la Société Mathématique de France, **120**, (1992), 1–139.
- [5] A. Ambrosetti, M. Badiale, *The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl., **140** (1989), 363–373.
- [6] A. Ambrosetti, M. Calahorrano, F. Dobarro, *Global branching for discontinuous problems*, Comment Math. Univ. Carolina, **31**, (1990), 213–222.
- [7] A. Ambrosetti, M. Struwe, *Existence of steady vortex rings in an ideal fluid*, Arch. Rat. Mech. Anal., **108** (1989), 97–109.
- [8] A. Anane, O. Chakrone, M. Moussa, *Spectrum of one dimensional p -Laplacian Operator with indefinite weight*, EJTDE, **17**, (2002), 1–11.
- [9] D. Arcoya, M. Calahorrano, *Some Discontinuous Problems with a Quasilinear Operator*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **187**, (1994), 1059–1072.
- [10] H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolcetta, L. Nirenberg, *Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems*, NoDEA, **2**, (1995), 553–572.
- [11] M. Calahorrano, S. González, *Existence of weak solutions for a p -Laplacian type problem with an indefinite discontinuous term*, Pre-print EPN, (2005), 1–15.

- [12] M. Calahorrano, J. Mayorga, *Un problema discontinuo con operador cuasilineal*, Revista Colombiana de Matemáticas, **35**, (2001), 1–11.
- [13] A. Castro, *Non negative solutions for non-positone problems*, Lect. College on Variational Methods, ICTP, Trieste, (1988) 1–12.
- [14] A. Castro, A. Kurepa, *Energy analysis of a nonlinear singular differential equation and applications*, Rev. Colombiana Mat., **21**, (1987), 155–166.
- [15] A. Castro, C. Maya, R. Shivaji, *Nonlinear eigenvalue problems with semipositone structure*, EJDE, **Conf. 05**, (2000), 33–49.
- [16] A. Castro, R. Shivaji, *Nonnegative solutions for a class of nonpositone problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **108**, (1988), 291–302.
- [17] A. Castro, R. Shivaji, *Nonnegative solutions for a class of radially symmetric nonpositone problems*, Proc. Amer. Math. Soc., **106**, (1989), 735–740.
- [18] K. C. Chang, M.Y. Jiang, *Dirichlet problem with indefinite nonlinearities*, Calculus of Variations, **20**, (2004), 257–282.
- [19] M. Cuesta, *Eigenvalue problems for the p -Laplacian with indefinite weights*, Electronic Journal of Differential Equations, **33**, (2001), 1–9.
- [20] M. García-Huidobro, R. Manásevich, C. Yarur, *Some results about positive solutions of a nonlinear equation with a weighted Laplacian*, Bol. Soc. Parana. Mat., **22**, (2004), 57–65.
- [21] R. Manásevich, F. Zanolin, *Time-mappings and multiplicity of solutions for the one-dimensional p -Laplacian*, Nonlinear Anal., **21**, (1993), 269–291.
- [22] D. Papini, F. Zanolin, *A topological approach to superlinear indefinite boundary value problems*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **15**, (2000), 203–233.
- [23] D. Papini, F. Zanolin, *Differential equations with indefinite weight: boundary value problems and qualitative properties of the solutions*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **60**, (2002), 265–296.

- [24] D. Papini, F. Zanolin, *Periodic points and chaotic-like dynamics of planar maps associated to nonlinear Hill's equations with indefinite weight*, Georgian Mathematical Journal, **9**, (2002), 339–366.
- [25] C. Stuart, *Differential equations with discontinuous nonlinearities*, Arch. Rat. Mech. Anal., **63**, (1976), 59–75.
- [26] C. Stuart, J. F. Toland, *A variational method for boundary value problems with discontinuous non-linearities*, J. London Math. Soc., **21**, (1980), 319–328.